

4- Ma'ruza

Qattiq jism aylanma harakat dinamikasi.

Reja:

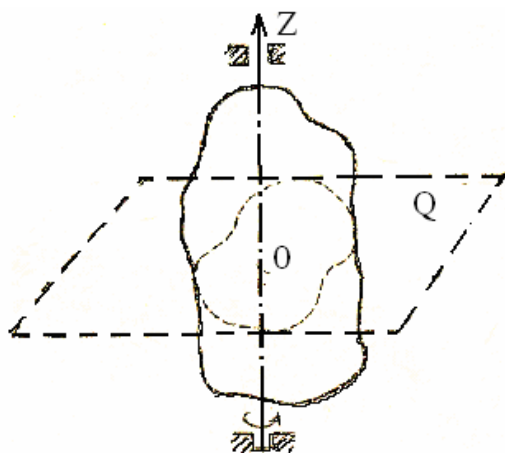
1. Aylanma harakat kinematikasi;
2. Kuch momenti;
3. Impuls momenti va uning o'zgarish qonuni;
4. Aylanma harakat dinamikasining asosiy tenglamasi;
5. Aylanma harakatning kinetik energiyasi.

Tayanch iboralar: Burchak tezlik va burchak tezlanish; Kuch momenti; Impuls momenti; Aylanma harakat dinamikasining asosiy qonuni; Inertsiya momenti; Aylanma harakatda kinetik energiyasi.

Adabiyotlar:[1;2;3;4;10.]

4.1. Aylanma harakat kinematikasi

Agar jism zarralarining o'zaro joylashishi o'zgarmasa, ya'ni u deformatsiyalanmaydigan bo'lsa bunday jism qattiq jism deb tushiniladi.



4.1- rasm

Absolyut qattiq jism deganda mutloqo deformatsiyalanmaydigan jism tushuniladi. Bunday jism zarralarining o'zaro joylashishi o'zgarmaydi. Aylanayotgan qattiq jismning qo'zg'almay qoladigan ikki nuqtasidan o'tkazilgan to'g'ri chiziq (4.1 rasmdagi OZ) aylanish o'qi deb, harakatni esa shu o'q atrofida qattiq jismning aylanma harakati deb ataladi. Aylanma harakat qilayotgan qattiq jism barcha nuqtalarining traektoriyalari aylanish o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekisliklarda yotadigan, markazlari aylanish o'qida joylashgan aylanalardan iborat.

Cheksiz kichik vaqt ichidagi burilish burchagiga burchak tezlik deb aytiladi.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (4.1)$$

Demak, aylanma harakat qilayotgan qattiq jismning burchak tezligi burilish burchagidan vaqt boyicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng.

Agar qattiq jismning burchak tezligi o'zgarmas qiymatga ega (ya'ni $\omega = const$) bo'lsa, jism tekis aylanayotgan bo'ladi. Bu holda burchak tezlik qiymati

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \quad (4.2)$$

ifoda bilan aniqlanishi mumkin.

Burchak tezlik notekis bo'lsa burchak tezlanish degan tushinchani kiritamiz va quyidagicha ifodalanadi:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (4.3)$$

Yoki (4.1) ni hisobga olsak quyidagi formula hosil bo'ladi:

$$\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (4.4)$$

Demak, aylanayotgan qattiq jism burchak tezlanishining qiymati burchak tezlikdan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga yoki burilish burchagidan vaqt bo'yicha Olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng.

SI sistemasida burchak *radian* hisobida, burchak tezlik *rad/s* hisobida, burchak tezlanish esa *rad/s²* hisobida o'lchanadi.

Aylanayotgan qattiq jism burchak karakteristikalari bilan mazkur jism ayrim nuqtalarining chiziqli karakteristikalari orasidagi bog'lanishni aniqlaylik. Shu qattiq jismning ixtiyoriy bitta nuqtasi biror Δt vaqt davomida bosib o'tgan masofasi ΔS uzunlikdagi aylana yoyi bilan harakterlanadi Shu vaqt davomida burilish burchagining o'zgarishi $\Delta \varphi$ bo'lsin. $\Delta \varphi$ burchak r radiusli aylananing markaziy burchagi bo'lgani uchun ΔS yoyni quyidagicha yozamiz:

$$\Delta s = r\Delta \varphi \quad (4.5)$$

Uning ikkala tomonini Δt ga bo'lamiz va vujudga kelgan nisbatlarning Δt nolga intilgandagi limitlarini olamiz:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad (4.6)$$

Bu tenglikning chap tomonidagi limit aylanma harakat qilayotgan nuqtaning *tezligi* (\mathcal{G}), o'ng tomondagi limit esa aylanayotgan *qattiq jismning burchak tezligi* (ω) dir. Shuning uchun (4.6) ni quyidagi ko'rinishda yoza olamiz:

$$\mathcal{G} = \omega r. \quad (4.7)$$

Demak, qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan qattik jism nuqtalarining chiziqli tezliklari shu nuqtalar radius vektorlarining moduliga to'g'ri proporsional ekan.

(4.7) dan foydalanib, (1.15) va (1.16) lar asosida, normal va tangentsial tezlanishlar uchun quyidagi ifodalarni hosil qilamiz:

$$a_n = \frac{\mathcal{G}^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r \quad (4.8)$$

$$a_t = \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega r) = \frac{d\omega}{dt} r = \varepsilon r \quad (4.9)$$

Demak, qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan qattiq jismning aylanish o'qidan uzoqrokdagi nuqtalari uchun normal va urinma tezlanishlarning qiymatlari ham kattaroq bo'lar ekan.

Qattiq jismning aylanishi davr (T) va chastota (ν) kabi kattaliklar yordamida ham ifodalanadi.

Qattiq jismning bitta to'liq aylanishi uchun ketgan vaqt aylanish davri deb, birlik vaqt ichidagi aylanishlar soni aylanish chastotasi deb ataladi.

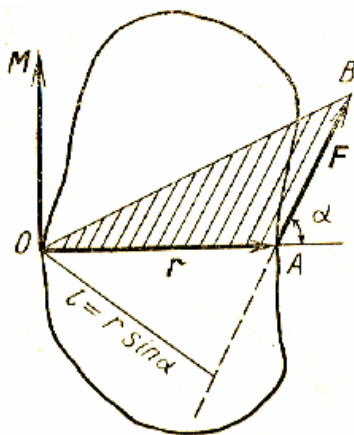
U holda tekis aylanayotgan qattiq jism uchun (4.2) ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{t} = 2\pi\nu \quad (4.10)$$

Burchak tezlik vektori — aylanish o'qida yotadigan va yo'nalishi qattiq jismning aylanish yo'nalishi bilan o'ng vint qoidasi asosida aniqlanadigan vektordir. **Burchak tezlanish vektori** ham aylanish o'qida yotadigan vektor, uning yo'nalishi burchak tezlik vektori o'zgarishi ($\Delta\omega$) ning yo'nalishi bilan mos tushadi.

4.2. Kuch momenti

Qattiq jismni aylanma harakatga keltirish uchun muayan nuqtadan unga biror kuch ta'sir etishi kerak. 4.2-rasmda tasvirlangan jism vertikal OZ , o'q atrofida aylana olish imkoniyatiga ega. Lekin bu jism har qanday yo'nalishdagi kuch ta'sirida ham aylanavermaydi. Xususan, F kuchning yo'nalishi 4.2a-rasmda tasvirlangandek bo'lganda jism soat strelkasining yo'nalishida OZ o'q atrofida aylanma harakatga keladi. F kuch 4.2 b-rasmdagidek yo'nalishida ta'sir etgan holda esa jism soat strelkasiga teskari yo'nalishda aylanadi. Agar jismga ta'sir etuvchi kuch 4.2 ye va 4.3 g-rasmda ko'rsatilgan yo'nalishlarga ega bo'lsa jism aylanmaydi.



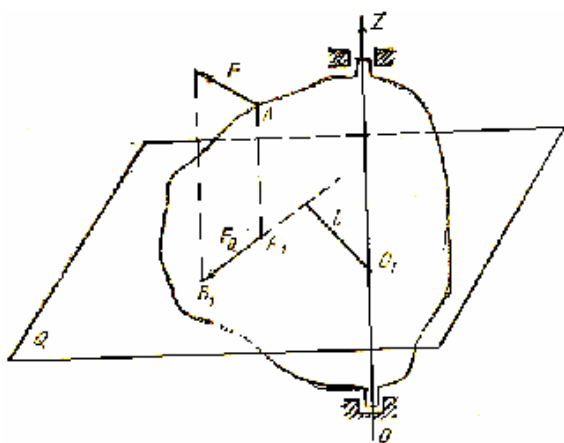
4.3- rasm

Kuch vektori bilan ustma-ust tushadigan to'g'ri chiziq shu kuchning ta'sir chizig'i deb ataladi.

Agar kuch jismning aylanish o'qiga paralel yoki perpendikulyar bo'lsa jism aylanma harakatga kelmaydi. Tajribalarning ko'rsatishicha, miqdorlari turlicha bo'lgan kuchlar yoki kattaligi aynan bir xil, lekin yo'nalishlari turlicha bo'lgan kuchlar ta'sirida jismning aylanishi turlicha bo'ladi. Umuman, jismni aylantira olish uchun kuch momenti degan miqdoriy kuch xarakteristikasidan foydalanish kerak.

Jismning biror nuqtasiga F kuch ta'sir etayotgan bo'lsin (4.3-rasm). Bu kuchning ixtiyoriy qo'zg'almas O nuqtaga nisbatan momenti (M) deganda O nuqtadan kuchning qoyilish nuqtasiga o'tkazilgan radius-vektor (r) va F kuchning vektor ko'paytmasi tushuniladi, ya'ni

$$M = [r \cdot F] \quad (4.1)$$

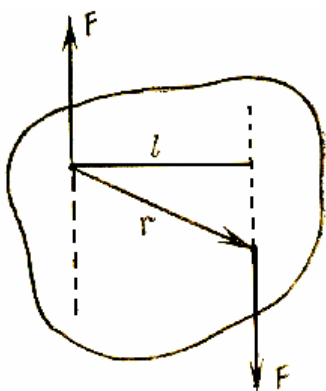


4.4-rasm

bog'langan: O nuqtaga joylashgan o'ng vintni F ning ta'siri tomoniga buraganimizda vint ilgariharakating yo'nalishi M ning yo'nalishini ko'rsatadi.

Aylanuvchi qattiq jismga ta'sir etayotgan bir necha kuchning ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan momenti (M) har bir F_i kuchning shu nuqtaga nisbatan momenti (M_i)larning vektor yig'indisi tarzida aniqlanadi, ya'ni.

$$M = \sum M_i \quad (4.3)$$



4.5-rasm

Agar ta'sir etayotgan barcha kuchlarnipg qoyilish nuqtasi umumiy bo'lsa, mazkur kuchlarning biror O nuqtaga nisbatan momentlarining vektor yig'indisi shu kuchlar teng ta'sir etuvchisi ($F = \sum F_i$) ning mazkur nuqtaga nisbatan momenti bilan almashtirilishi mumkin.

Ba'zan, jism biror qo'zg'almas o'q (4.4-rasm) atrofida aylana olish imkoniyatiga ega bo'ladi. Bunday hollarda ta'sir etuvchi kuchning o'qqa nisbatan momenti tushunchasini kiritamiz.

Kuchning biror o'qqa nisbatan momenti deb shu kuchning Q perpendikulyar tekislikdagi proektsiyasining berilgan o'q va mazkur tekislikning kesishish nuqtasiga nisbatan momentining algebraik qiymatiga aytiladi.

Masalan, jismning A nuqtasiga (4.4-rasm) qoyilgan F kuchning OZ o'qqa nisbatan momentini hisoblash uchun o'qqa perpendikulyar ravishda Q tekislik o'tkazamiz va F kuchning Q tekislikdagi proektsiyasini F_Q bilan belgilaymiz. Q tekislik va OZ o'qning kesishish nuqtasi (O_1) dan F_Q ga o'tkazilgan perpendikulyarni l bilan belgilasak, yuqoridagi ta'rifga asosan,

$$M_z = \pm F_Q l \quad (4.4)$$

deb yozish mumkin. M_z ning ishorasini tanlashda shartli ravishda quyidagi qoidaga rioya qilamiz: **OZ o'qning musbat uchidan qaraganda kuchning o'qqa perpendikulyar tekislikdagi proektsiyasi jismni o'q atrofida soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishda aylantirishga intilsa, kuchning o'qqa nisbatan momentini musbat, aks holda manfiy ishora bilan olamiz.**

M ning moduli quyidagicha ifodalanadi:

$$M = Fr \sin \alpha = Fl \quad (4.2)$$

Bunda α - vektorgi r va F kuch orasidagi burchak. U holda kuchning ta'sir chizig'iga O nuqtadan

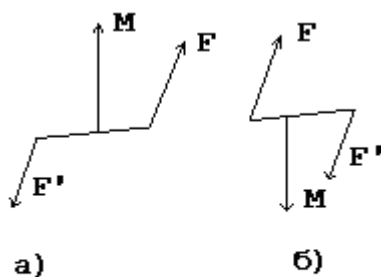
tushirilgan perpendikulyarning uzunligi $l = r \sin \alpha$ bo'ladi va uni F kuchning O nuqtaga nisbatan yelkasi deb ataladi. M va F vektorlarning yo'nalishlari o'ng vint koidasi asosida

Kuchning o'qqa nisbatan momenti (M_z) bilan shu kuchning mazkur o'qdagi nuqtaga nisbatan momenti (M) o'zaro quyidagicha bog'langan :

$$M_z = M \cos \alpha = [r \cdot F] \quad (4.5)$$

Bunda M va OZ orasidagi burchak α bilan belgilangan. Binobarin, biror F kuchning o'qdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentining shu o'qdagi proektsiyasi F ning mazkur o'qqa nisbatan momentini ifodalaydi.

Bir to'g'ri chiziqda yotmagan, bir-biriga teng, lekin qaramaqarshi yo'nalgan ikkita kuchning qattiq jismga ta'siri alohida ahamiyatga ega (3.9 rasm). Bunday kuchlarni **juft kuchlar** yoki «**juft**» lar deb yuritiladi. Juft kuchni tashkil etuvchi kuchlarning qoyilish nuqtalari ham, ta'sir chiziqlari ham umumiy bo'lmaganligi uchun ularni bitta teng ta'sir etuvchi kuch bilan almashtirib bo'lmaydi, albatta. Juft kuch qattiq jismni



ilgarilanma harakatga keltira olmaydi, lekin jismni massa markazidan o'tgan va kuchlar yotgan tekislikka perpendikulyar bo'lgan o'q atrofida aylantiradi. Juft kuchning aylantiruvchi ta'siri *juft kuch momenti* deb ataladigan vektor bilan harakterlanadi:

$$M = [r \cdot F]. \quad (4.6)$$

4.6-rasm

Juft kuch momenti (M) juft kuchni tashkil etuvchi kuchlar yotgan tekislikka perpendikulyar ravishda shundai yo'nalganki (3.10 rasm), mazkur yo'nalish va jismning juft kuch ta'siridagi aylanishining yo'nalishi o'ng vint sistemasini tashkil etadi.

Juft kuch momentining moduli

$$M = F \cdot l \quad (4.7)$$

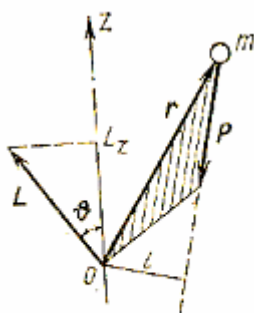
ifoda yordamida, aniqlanishi mumkin. Bunday l – juft kuchni tashkil etuvchi kuchlar ta'sir chiziqlari orasidagi eng qisqa masofa (3.9 rasmga q.), uni juft kuch yelkasi deb ataladi.

Juft kuchning asosiy xossasi shundan iboratki, juft kuchni tashkil etuvchi kuchlar yotgan tekislik boylab, yoki unga parallel bo'lgan tekisliklar boylab ixtiyoriy ravishda juft kuch ko'chirilganda ham uning qattiq jismga ta'siri o'zgarmaydi. Shuning uchun juft kuch momentini qattiq jismning ixtiyoriy nuqtasiga qoyilgan deb hisoblash mumkin.

Kuch momentining o'lchov birligi SI sistemasidada $[H \cdot m]$ da o'lchanadi.

4.3. Impuls momenti va uning o'zgarish qonuni

t massali moddiy nuqta V tezlik bilan harakatlanayotganda $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ impulsiga ega. Mazkur moddiy impulsining ixtiyoriy qo'zg'almas O nuqtaga nisbatan momenta quyidagi vektor ko'paytma bilan anqlanadi:



4.7-rasm

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}], \quad (4.8)$$

bunda \mathbf{g} — O nuqtadan moddiy nuqtaning ayni paytdagi vaziyatini ifodalovchi nuqtagacha o'tkazilgan radius-vektor. \mathbf{L} vektorning yo'nalishi o'ng vint qoidasi asosida topiladi. \mathbf{r} va \mathbf{p} lar yotgan (rasmdagi shtrixlangan) tekislikka perpendikulyar ravishda O nuqtaga joylashtirilgan o'ng vintni \mathbf{r} yo'nalishida buralganda vintning ilgariharakati \mathbf{L} ning yo'nalishini ko'rsatadi. \mathbf{r} yo'nalishidagi to'g'ri chiziqqa O nuqtadan tushirilgan perpendikulyar uzunligini l bilan belgilasak, impuls momentining modulini

$$L = rp \sin(\alpha) = lp \quad (4.9)$$

ko'rinishda yozish mumkin. SI sistemasida impuls momenta $(\text{kg} \cdot \text{m}^2)/\text{s}$ da o'lchanadi.

Moddiy nuqta impulsining O nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy qo'zg'almas OZ , o'qqa nisbatan moment (L_z) va impulsning O nuqtaga nisbatan momenta (L) orasidagi bog'lanish quyidagi rasm munosabat bilan ifodalanadi;

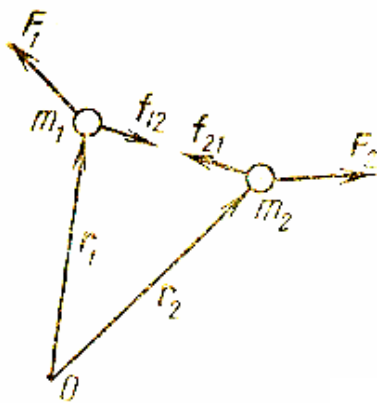
$$L_z = L \cos \theta = [rp]_z, \quad (4.10)$$

bundagi θ — M va OZ o'q orasidagi burchak. L_z ning qiymati quyidagi ifodadan foydalanib hisoblanishi mumkin:

$$L_z = \pm p_O l \quad (4.11)$$

(4.10) da moddiy nuqta impulsi (\mathbf{r}) ning OZ o'qda perpendikulyar ravishda o'tkazilgan Q tekislikdagi proektsiyasi p_Q bilan, OZ o'q va Q tekislikning kesishish nuqtasi (O_1) dan P_Q ga o'tkazilgan perpendikulyar uzunligi esa l bilan belgilangan. L_z ning ishorasini quyidagicha tanlaymiz: OZ o'qning musbat uchidan qaraganda moddiy nuqta impulsining o'qqa perpendikulyar tekislikdagi proektsiyasining yo'nalishi soat strelkasining harakatiga teskari bo'lsa L_z ni musbat, aks holda manfiy ishora bilan olamiz.

Endi moddiy nuqta impuls momentining o'zgarish qonunini keltirib chiqaraylik. Buning 4.8 rasm uchun (4.10) ifodadan vaqt buyicha hosila olaylik:



4.9-rasm

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d}{dt}[r \cdot p] = \left[\frac{dr}{dt} \cdot p \right] + \left[r \cdot \frac{dp}{dt} \right]. \quad (4.12)$$

Bu ifodaning o'ng tomonidagi birinchi had tezlik ($dr/dt = \mathcal{G}$) va impuls ($P = m\mathcal{G}$) vektorlarining vektor ko'paytmasidir. \mathcal{G} va P yo'nalishlari bir xil bo'lganligi uchun ularning vektor ko'paytmasi nolga teng. Ikkinchi haddagi $dp/dt = F$ vektor, moddiy nuqtaga ta'sir qilayotgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi ekanligini bilamiz. Shuning uchun (4,12) ifoda quyidagi ko'rinishga keladi;

$$\frac{dL}{dt} = [r \cdot F] = M, \quad (4.13)$$

bundagi L va M —ixtiyoriy qo'zg'almas O nuqtaga nisbatan impuls momenti va kuch momentidir. (4.13) ifoda moddiy nuqta impuls momentining o'zgarish qonunini ifodalaydi. *Moddiy nuqta impulsining ixtiyoriy qo'zg'almas O nuqtaga nisbatan momentidan vaqt buyicha olingan birinchi tartibli hosila shu moddiy nuqtaga ta'sir qilayotgan kuchlar teng ta'sir etuvchisining O nuqtaga nisbatan momenti bilan aniqlanadi.*

M nolga teng bo'lgan xususiy holda impuls momentining o'zgarish qonuni impuls momentining saqlanish Qonuniga aylanadi, ya'ni (4.13) ifoda

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad (4.14)$$

ko'rinishga keladi. Mazkur tenglik $L = \text{const}$ bo'lgandagina bajariladi.

Demak, *moddiy nuqtaga ta'sir qilayotgan kuchlar teng ta'sir etuvchisining ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan momenta nolga teng bo'lganda moddiy nuqta impulsining shu O nuqtaga nisbatan momenti, o'zgarmaydi.*

4.4. Aylanma harakat dinamikasining asosiy qonuni

Massasi m bo'lgan jism \mathcal{G} tezlik bilan harakatlanayotgan bo'lsa uning impuls $P = m\mathcal{G}$ ekanligini bilamiz. Shu jismning ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan impuls momenti

$$L = RP = Rm\mathcal{G} = mR^2\omega \quad (4.15)$$

Tenlamani xosil kilamiz. *Bu formuladagi mR^2 ifoda jismning aylanish o'qiga nisbatan inertsia momenti deb aytiladi. Inertsia momentining SI sistemasidagi o'lchov birligi kg m^2 bo'ladi. Inertsia momentini I bilan belgilaymiz va uning ifodasini quyidagicha yozamiz:*

$$I = mR^2 \quad (4.16)$$

Shunday qilib, (4.15) formulani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$L = I\omega \quad (4.17)$$

Shu ifodaning xar ikkala tomonidan vaqt buyicha xosila olsak quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} \quad (4.18)$$

Bilamizki impuls momentning o'zgarishi, ya'ni $dL/dt = M$ kuch momentiga teng bo'lar edi, ung tarafdagi burchak tezlikning uzgarishi, ya'ni $d\omega/dt = \varepsilon$ burchak tezlanishni berar edi. Buni hisobga olsak kuch momentining quyidagi ifodasi kelib chiqadi:

$$M = I \varepsilon \quad (4.19)$$

Bu tenglama aylanma harakat dinamikasining asosiy qonunini ifodalaydi. Bu yerda ε – aylanma harakat qilayotgan jismning burchak tezlanishi.

Ixtiyoriy qo'zg'almas aylanish o'qiga nisbatan jism inertsia momenti bilan burchak tezlanishning ko'paytmasi jismiga ta'sir etayotgan kuchlarning shu o'qga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

4.5. Aylanma harakatda kinetik energiya

OZ o'q atrofida aylanma harakat qilayotgan qattiq jisimning biror bo'lagining kinetik energiyasi

$$W_k = \frac{m\varrho^2}{2} \quad (4.20)$$

bo'ladi. Bunda m va ϱ – mos ravishda jism bo'lakchasining massasi va chiziqli tezligi. Bu formulani burchak tezlik orqali ifodalasak quyidagi ko'rinishni oladi:

$$W_k = \frac{mR^2\omega^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2} \quad (4.21)$$

Shu formula aylanma harakat qilayotgan jismning kinetik energiyasini ifodalaydi.

Ayrim jismlarning inertsia momentlari

Jism	Aylanish o'qining xolati	Inertsia momenti J_a
Yupqa devorli tsilindr	Aylanish o'qi tsilindrning markazidan o'tgan	mR^2
Disk yoki ichi to'la tsilindr	Aylanish o'qi tsilindrning markazidan o'tgan	$\frac{1}{2}mR^2$
Shar	O'q sharning markazidan o'tgan	$\frac{2}{5}mR^2$
Yupqa devorli sfera	O'q sferaning markazidan o'tgan	$\frac{2}{3}mR^2$
l uzunlikdagi sterjn	Aylanish o'qi sterjnga tik vauning markazidan utgan	$\frac{1}{12}ml^2$

l uzunlikdagi sterjn	Aylanish o'qi sterjnga tik va uning oxirgi uchidan o'tgan	$\frac{1}{3}ml^2$
-------------------------	--	-------------------

Savollar:

1. Burchak tezlik va burchak tezlanish?
2. Kuch momenti nima?
3. Impuls momenti nima?
4. Inertsiya momenti nima?
5. Aylanma harakat dinamikasining asosiy qonuni?
6. Aylanma harakatda kinetik energiya?